

Sergio Lombardo:  
ESTETICA DELLA COLORAZIONE DI MAPPE

**Abstract**

*Every planar map is four colorable (Appel, Haken, 1976). Every planar map embedded on the torus is seven colorable (Dirac, 1957). Such well known theorems may lead to formulate the following aesthetic problems. Are minimal colored maps aesthetically preferred to non minimal colored ones ? Is there some aesthetically preferred color set ? If so, does some aesthetic ratio in color set choice exist ? The aesthetics of map coloring seems too complex to be empirically solved. That is for the extremely large choice of colors and for the high number of possible maps. Actually the aesthetic preference of a colored map can also be due to the formal structure of the map. Though, if minimal colorations are always preferred to non minimal ones, map coloring aesthetics is not an untractable problem.*

*To test such conjecture I restricted the survey only to toroidal maps and to a simplified set of 43 colors. I used a standard minimal coloring procedure as well. The results were always favorable to minimal coloration and non minimal colorations were always less preferred. Coloring a 5-chromatic stochastic toroidal map, a single color in 5 consecutive and equidistant degrees of lightness was preferred to 5 different colors, and to any other coloration. Coloring a 4-chromatic stochastic toroidal map, the color permutation appeared not aesthetically significant. Light and warm colors were preferred in little and compact regions. Dark and cold colors were preferred in large and complex regions.*

Sono sufficienti 4 colori per colorare qualsiasi mappa planare (Appel, Haken, 1976). Se la mappa è inscritta su toro, sono sufficienti 7 colori (Dirac, 1957). Questi noti teoremi autorizzano la formulazione di alcuni problemi estetici :

- 1- Le mappe colorate con il minimo numero di colori sono esteticamente preferibili a quelle colorate con un numero di colori superiore al minimo ?
- 2- Vi sono insiemi di colori esteticamente preferiti ?
- 3- Gli insiemi preferiti rispondono a qualche criterio razionale ?
- 4- Se le mappe colorate in modo minimale (con il numero minimo di colori) fossero sempre preferibili a quelle colorate in modo non minimale (*teoria minimalista*), il numero delle mappe possibili si ridurrebbe in modo da rendere il problema estetico empiricamente trattabile ?

Il problema estetico della colorazione di mappe è apparso finora troppo complesso per essere risolto sperimentalmente. Ciò era dovuto sia alla grande quantità di colori disponibili, sia al grande numero di mappe possibili. Infatti la colorazione esteticamente preferibile può variare in relazione alla differente struttura formale della mappa.

Tuttavia, se le colorazioni minimali, almeno nei casi di mappe stocastiche, fossero sempre preferibili a quelle ridondanti, allora il problema si ridurrebbe in una forma sperimentalmente trattabile.

Per provare tale congettura

- a- Ho isolato il problema della colorazione da quello della forma considerando solo mappe stocastiche. Tali mappe, infatti, si approssimano statisticamente a un perfetto disordine formale e non privilegiano alcuna forma.
- b- ho considerato solo mappe toroidali
- c- ho costruito una tabella semplificata di 43 colori (tab. 1)
- d- ho definito una procedura per minimalizzare sistematicamente la colorazione di mappe (tab. 2)
- e- ho definito tutti i modi possibili di colorazione delle mappe toroidali, da quelle quadricromatiche a quelle ettacromatiche (tab.3)
- f- ho costruito una campionatura delle mappe minimali toroidali comprese fra quelle quadricromatiche e quelle ettacromatiche (tab.4).

Tab.1 - COLORI

VM1	GI1	SM1	AZ1	VI1	MG1	NE=GR1
VM2	GI2	SM2	AZ2	VI2	MG2	GR2
VM3	GI3	SM3	AZ3	VI3	MG3	GR3
VM4	GI4	SM4	AZ4	VI4	MG4	GR4
VM5	GI5	SM5	AZ5	VI5	MG5	GR5
VM6	GI6	SM6	AZ6	VI6	MG6	GR6
BI=VM7	BI=GI7	BI=SM7	BI=AZ7	BI=VI7	BI=MG7	BI=GR7

Leggenda: VM (varmiglio) GI (giallo) SM (smeraldo) AZ (azzurro) VI (viola) MG (magenta) NE (nero) GR (grigio) BI (bianco) . I numeri indicano gradi successivi ed equidistanti di chiarezza. Il grado 7 di chiarezza equivale al bianco per tutti i colori.

Tab. 2 - ORDINE DI COLORAZIONE DEI PAESI

- 1- ignorare i paesi con 3 confinanti o meno
- 2- ordinare i rimanenti paesi a complessità decrescente da quello con più confinanti a quello con meno confinanti (a parità di numero di confinanti preferire il paese con i confinanti più complessi)
- 3- colorare i paesi in ordine di complessità decrescente
- 4- attribuire preferibilmente il primo colore A. Se vi sono già confinanti del primo colore attribuire il secondo colore B. Se vi sono già confinanti sia del primo che del secondo colore attribuire il terzo colore C, eccetera.

Tab.3 - COLORAZIONE DI MAPPE  
4-7 CROMATICHETab. 4 – MAPPE MINIMALI TOROIDALI  
4-7 CROMATICHE

## Quadricromatiche

A1-A2-A3-A4	A4
A1-A2-A3-B1	A3+B1
A1-A2-B1-B2	A2+B2
A1-A2-B1-C1	A2+B1+C1
A1-B1-C1-D1	A1+B1+C1+D1

## Pentacromatiche

A1-A2-A3-A4-A5	A5
A1-A2-A3-A4-B1	A4+B1
A1-A2-A3-B1-B2	A3+B2
A1-A2-B1-B2-C1	A2+B2+C1
A1-A2-B1-C1-D1	A2+B1+C1+D1
A1-B1-C1-D1-E1	A1+B1+C1+D1+E1

## Esacromatiche

A1-A2-A3-A4-A5-A6	A6
A1-A2-A3-A4-A5-B1	A5+B1
A1-A2-A3-A4-B1-B2	A4+B2
A1-A2-A3-B1-B2-B3	A3+B3
A1-A2-A3-A4-B1-C1	A4+B1+C1
A1-A2-A3-B1-B2-C1	A3+B2+C1
A1-A2-B1-B2-C1-C2	A2+B2+C2
A1-A2-A3-B1-C1-D1	A3+B1+C1+D1
A1-A2-B1-B2-C1-D1	A2+B2+C1+D1
A1-A2-B1-C1-D1-E1	A2+B1+C1+D1+E1
A1-B1-C1-D1-E1-F1	A1+B1+C1+D1+E1+F1

## Ettacromatiche

A1-A2-A3-A4-A5-A6-A7	A7
A1-A2-A3-A4-A5-A6-B1	A6+B1
A1-A2-A3-A4-A5-B1-B2	A5+B2
A1-A2-A3-A4-B1-B2-B3	A4+B3
A1-A2-A3-A4-A5-B1-C1	A5+B1+C1
A1-A2-A3-A4-B1-B2-C1	A4+B2+C1
A1-A2-A3-B1-B2-B3-C1	A3+B3+C1
A1-A2-A3-B1-B2-C1-C2	A3+B2+C2
A1-A2-A3-A4-B1-C1-D1	A4+B1+C1+D1
A1-A2-A3-B1-B2-C1-D1	A3+B2+C1+D1
A1-A2-B1-B2-C1-C2-D1	A2+B2+C2+D1
A1-A2-A3-B1-C1-D1-E1	A3+B1+C1+D1+E1
A1-A2-B1-B2-C1-D1-E1	A2+B2+C1+D1+E1
A1-A2-B1-C1-D1-E1-F1	A2+B1+C1+D1+E1+F1
A1-B1-C1-D1-E1-F1-G1	A1+B1+C1+D1+E1+F1+G1

## ESPERIMENTO 1

### IPOTESI

La permutazione dell'ordine dei colori di una mappa stocastica toroidale quadricromatica, le cui regioni differiscono per area e per complessità, ma non per la struttura formale, non incide significativamente sulle preferenze estetiche di un campione. Detto in altro modo, se una mappa quadricromatica toroidale è colorata con il numero di colori minimo e se la struttura formale dei diversi paesi è stocastica, l'ordine di attribuzione dei colori non è esteticamente significativo.

### STIMOLI

Una mappa toroidale stocastica colorabile con 4 colori, composta di 12 paesi di differente area e complessità formale è stata colorata con i seguenti 4 colori : A (verde smeraldo scuro), B (verde smeraldo), C (verde smeraldo chiaro), D (magenta).

Le differenze di area e di complessità erano le seguenti:

2 paesi, molto estesi e complessi, coprivano circa il 40% dell'area totale della mappa ed erano colorati con A.

3 paesi, meno estesi e complessi, coprivano circa il 30% dell'area totale della mappa ed erano colorati con B.

4 paesi, ancora meno estesi e complessi, coprivano circa il 20% dell'area ed erano colorati con C.

3 paesi, meno estesi e complessi di tutti, coprivano un'area del 10% del totale ed erano colorati con D (Fig.1)

L'ordine dei colori A,B,C,D è stato permutato ottenendo in tutto 24 stimoli.

### METODO

Un campione sperimentale di 56 persone alle quali i 24 stimoli furono sottoposti in ordine sempre diverso, ha indicato le sue preferenze estetiche con valutazione da 1 a 10.

### RISULTATI

La mappa preferita (A, B, C, D) ha ottenuto 462 voti, la meno preferita (D, C, B, A) ne ha ottenuti 424. Tuttavia, malgrado la relativa ampiezza della dispersione, le preferenze non avevano alcuna evidente sistematicità rispetto all'ordine dei colori e i risultati complessivi sono stati ritenuti poco significativi. La permutazione degli stessi 4 colori non cambia in modo significativo le preferenze di un campione.

L'unico risultato significativo riguardava la preferenza dei colori A, B (scuri e freddi) per i paesi più complessi ed estesi e la preferenza dei colori C, D (chiari e caldi) per i paesi più piccoli e compatti.

## ESPERIMENTO 2

### IPOTESI

Dal momento che la preferenza estetica nella colorazione delle mappe stocastiche non dipende dall'ordine di permutazione dei colori, come dimostra l'esperimento precedente, sono state fatte le seguenti ipotesi, in accordo con la teoria minimalista (Lombardo, 1995)

- 1- Le mappe stocastiche colorate con il numero di colori minimo sono preferite esteticamente a quelle colorate con un numero di colori maggiore del minimo.
- 2- Fra le mappe stocastiche colorate con il numero minimo di colori sono preferite esteticamente quelle che usano meno tinte e più gradienti equidistanti di luminosità (o luminanza) a quelle che impiegano molte tinte e pochi gradienti di luminosità, o gradienti non equidistanti. Ad esempio, una mappa pentacromatica colorata con una sola tinta in 5 gradi di luminosità equidistanti è preferita esteticamente alla stessa mappa pentacromatica colorata con 5 tinte diverse.

### STIMOLI

E' stata costruita una *tabella cromatica* di 6 tinte e un grigio, ciascuna delle tinte e il grigio erano presentati in 6 diversi gradienti di luminanza. Per tutti i colori valeva il bianco come massimo livello di chiarezza. La tabella conteneva un totale di 43 colori (tab.1).

E' stata costruita una mappa stocastica inscritta su toro la cui colorazione richiedeva un minimo di 5 colori (Fig.2). Questa mappa è stata ripetuta 4 volte e accostata (Fig.3), in modo da poter essere colorata con un numero di colori compreso fra 5 e 15. La mappa era tratta da un'opera dello scrivente: *Foresta Impigliata Bipolare 1993* (Lombardo, 95). La scelta di una mappa stocastica e non di una mappa minimale come quelle in tab. 4, è dovuta alla distribuzione casuale delle ridondanze formali nelle mappe stocastiche. Tali ridondanze riducono eventuali interferenze formali sulla colorazione.

I colori sono stati scelti secondo 5 diversi criteri :

- 1- scegliere i 5 colori necessari e sufficienti da un'unica tinta, con 5 gradienti di luminanza (toni) consecutivi ed equidistanti.
- 2- scegliere i 5 colori necessari e sufficienti da 2 tinte complementari una delle quali in 4 toni consecutivi ed equidistanti.
- 3- scegliere i 5 colori necessari e sufficienti da 2 tinte complementari, una delle quali in 3 toni consecutivi ed equidistanti, l'altro in 2 toni.
- 4- scegliere i 5 colori necessari e sufficienti da 3 tinte diverse, due delle quali in due diversi toni.
- 5- estrarre a sorte 5 colori diversi dalla Tab.1, necessari e sufficienti a colorare la mappa secondo una colorazione minimale.
- 6- estrarre a sorte dalla Tab.1 un colore per ogni paese dopo aver tolto quelli già attribuiti ai paesi confinanti, potendo perciò usare un numero di colori compreso fra 5 e 15.

E' stato quindi costruito un campionario di 18 stimoli, 3 per ciascun criterio di colorazione (Fig. 4).

#### METODO

L'insieme dei 18 stimoli, disposti in ordine diverso per ciascun soggetto, fu presentato a un campione sperimentale di 42 soggetti (20 M e 22 F, studenti di Accademia). Ciascun soggetto doveva indicare lo stimolo soggettivamente preferito, che veniva tolto, poi quello preferito fra i rimanenti, che veniva di nuovo tolto, e così di seguito fino a quando ne rimaneva uno, il meno preferito. Con questa procedura si otteneva un punteggio consecutivo di preferenza in ordine decrescente che andava da 18 punti (quello preferito fra tutti) a un punto (quello meno preferito).

#### RISULTATI

Fra i 6 criteri di colorazione considerati, quello che ha ricevuto il punteggio più elevato è stato il criterio 1, mentre i criteri 5 e 6 sono stati i meno preferiti (tab. 5), pertanto è stata confermata l'ipotesi principale di questo articolo che le colorazioni minimali sono preferite rispetto a quelle non minimali. Inoltre, poiché i criteri di colorazione sono stati preferiti sempre meno al crescere del numero di colori impiegati, anche la seconda ipotesi risulta dimostrata.

Tab. 5 – PREFERENZE NEI CRITERI DI COLORAZIONE DI MAPPE STOCASTICHE

criteri di colorazione	stimoli	punteggio		punteggio complessivo
		maschi	femmine	
1	1 2 3	12,99	12,16	12,57
2	4 5 6	11,43	10,54	10,98
3	7 8 9	8,71	7,84	8,27
4	10 11 12	8,40	8,01	8,20
5	13 14 15	5,07	5,66	5,36
6	16 17 18	4,35	6,69	5,52

Tab. 6 - PREFERENZE DI GENERE

Stimoli	maschi	femmine
1	12,76	10,86
2	14,15	11,86
3	12,07	13,77
4	10,69	10,45
5	12,76	10,36
6	10,84	10,81
7	7,38	8,54
8	10,92	7,18
9	7,84	7,81
10	8,61	9,68
11	8,07	7,50
12	8,53	6,86
13	5,53	5,45
14	7,76	6,36
15	3,92	5,18
16	5,46	7,27
17	2,76	6,95
18	4,84	5,86

## DISCUSSIONE

I risultati sperimentali, oltre a confermare chiaramente l'ipotesi principale, consentono ulteriori considerazioni. I criteri di colorazione, come si osserva nella tab. 3, si possono distribuire in un ordine che va da quello che può essere descritto con un solo simbolo ( $An$ , dove  $n \leq 7$  dato che non può esistere alcuna mappa minimale toroidale che richiede necessariamente più di 7 colori) a quello che deve essere descritto con 7 simboli, dato che ogni simbolo rappresenta un diverso colore. Per calcolare sistematicamente l'ordine di minimalità (o di *complicazione*, dato che il contrario della *minimalità* non può essere né la *complessità*, né la *ridondanza*, ma piuttosto il *rumore*), possiamo prendere in considerazione le permutazioni consentite da ciascun criterio di colorazione senza considerare i gradienti dello stesso colore, ma solo i diversi colori. Gli stimoli 1-2-3 sono monocromi, perciò non consentono permutazioni di differenti colori. Gli stimoli 4-5-6 consentono 5 permutazioni, poiché la regione colorata con il colore complementare può essere scelta fra 5 possibilità. Gli stimoli 7-8-9 consentono 10 permutazioni poiché le due regioni colorate con il colore complementare possono essere scelte in 10 modi. Gli stimoli 10-11-12 consentono 30 permutazioni (un colore di due gradienti può essere attribuito in 10 modi, restano da colorare tre regioni con due colori che possono essere attribuiti in tre modi, dunque  $10 \times 3 = 30$  possibilità). Gli stimoli 13-14-15 possono essere colorati in  $5! = 120$  modi. Gli stimoli 16-17-18 possono essere colorati in un numero di modi maggiore di 120.

Ne risulta un ordine di minimalità decrescente: 1, 5, 10, 30, 120,  $>120$ . I risultati sperimentali rispecchiano fedelmente quest'ordine confermando che al diminuire del numero di tinte impiegate nel colorare una mappa, cresce la preferenza estetica nel modo descritto nelle due ipotesi sperimentali.

Chiameremo questo risultato *legge della minimalità cromatica*.

In verità la corrispondenza fra minimalità e preferenza risulta più evidente nel campione maschile, mentre nel campione femminile vi sono piccole deviazioni, non rilevanti e non in grado di mettere in dubbio le ipotesi principali. Per spiegare queste deviazioni tuttavia è stata costruita una tabella delle preferenze di genere in cui gli stimoli sono considerati singolarmente (Tab. 6). Si vede allora che le deviazioni riguardano soprattutto lo stimolo 17 e lo stimolo 8. Le femmine spravalutano lo stimolo 17 e sottovalutano lo stimolo 8, mentre per i maschi avviene esattamente il contrario. Si scopre qui una discriminante di genere nelle preferenze di gusto cromatico.

Lo stimolo 8, sopravvalutato dai maschi contiene 3 verdi e 2 magenta, lo stimolo 17 sopravvalutato dalle femmine contiene diversi rossi, marroni rossastri, rosa e pochi verdi. I maschi inoltre sopravvalutano lo stimolo 2 che è completamente verde e lo stimolo 5, che è quasi completamente verde con pochissimo rosso magenta. Le femmine d'altro canto sopravvalutano lo stimolo 3, completamente rosso magenta, e lo stimolo 10, che contiene un rosa, due grigi e due verdi e lo stimolo 7, che contiene due rossi e tre grigi. Nel complesso si potrebbe dire che le femmine preferiscano i rossi e i maschi preferiscano i verdi, ma questo è un risultato collaterale nel nostro esperimento.

Rimane ancora aperto il problema del rapporto tra forma minimale (non stocastica) e colorazione minimale. Infatti, l'uso di mappe stocastiche ci aveva consentito di accantonare il problema estetico della forma e di occuparci solo della colorazione. Una volta scoperte le leggi estetiche che regolano la scelta dei colori, si indagheranno le leggi che regolano le differenze formali e le loro eventuali influenze sulla colorazione.

Prima di terminare questo articolo vorrei fare qualche osservazione che limiterà ulteriormente la discrezionalità del pittore che vuole colorare una mappa toroidale.

Poiché le mappe toroidali possono essere colorate minimalmente con un numero di colori che non può essere superiore a sette, ma che può raggiungere i sette colori, e poiché la legge della minimalità cromatica sostiene che una tinta è preferibile a molte tinte, discende di conseguenza che per colorare mappe toroidali bisogna avere a disposizione sette gradienti di luminosità equidistanti (toni) della stessa tinta. Ma come scegliere la tinta? In generale l'esperimento ha dimostrato che i maschi sceglierebbero il verde smeraldo, le femmine il rosso magenta. Ma la nostra scala cromatica era limitata a sei tinte più il grigio. Inoltre i tre stimoli monocromi erano rosso magenta, verde smeraldo e grigio, mancavano l'arancio, il giallo, l'azzurro e il viola. Dovendo fare sette gradienti di giallo o di arancio si impiegano tonalità eccessivamente chiare, rendendo difficile la percezione dei confini fra regioni troppo chiare. Ciò dovrebbe diminuire la preferenza delle tinte chiare e calde specialmente nelle regioni molto estese, come suggerisce l'esperimento numero uno. Per fare sette gradienti di una tinta chiara, come il giallo, bisognerebbe usare parecchio nero, cosa che potrebbe rendere meno gradita la tinta chiara. Ma su questi argomenti dovremo tornare sulla base di nuovi dati empirici.

## Bibliografia

Dirac G. A. (1957) *Short proof of a map color theorem*. Canad. J. Math. 9 225-226.

Appel K., Haken W. (1976) *Every planar map is four colorable*. Bull. Amer. Math. Soc. 82, 711-712.

Lombardo, S. (1995) *Mostra retrospettiva di Sergio Lombardo, a cura di M. Calvesi e M. Mirolla*, tenuta presso il Museo Laboratorio di Arte Contemporanea dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Lombardo, S. (1995) *Explanation of my work of art since 1960 according to 5 aesthetic concepts*. Problems of

Informational Culture, Moscow-Krasnadar, Russia.